

文章编号:1001-7402(2015)04-0103-06

# 基于直觉模糊熵—解析面积的动态多属性决策方法<sup>\*</sup>

姚伟烈, 林琳

(沈阳航空航天大学理学院, 辽宁 沈阳 110136)

**摘要:**直觉模糊熵是直觉模糊集理论中的一个非常重要的概念,它反映了直觉模糊集的不确定程度和模糊程度。本文提出了一种改进的直觉模糊熵,并建立了基于该熵的动态属性权重模型和基于直觉模糊解析面积的 TOPSIS 法,并将其应用到直觉模糊多属性问题中。最后用实例表明了该决策方法的正确性和实用性。

**关键词:**多属性决策;直觉模糊熵;动态权重;直觉模糊解析面积

**中图分类号:**C934      **文献标识码:**A

## 1 引言

1965 年 Zadeh<sup>[1]</sup>提出了模糊集理论,1970 年 Bellman 和 Zadeh 利用模糊集理论解决多属性决策问题,提出了模糊决策分析的概念和模型,用于解决实际决策中的不确定性问题。模糊数的提出使得人们可以利用它较好地描述多属性决策中的模糊性。1983 年,保加利亚学者 Atanassov<sup>[2]</sup>提出了直觉模糊集的概念,直觉模糊集包含了隶属度、非隶属度和犹豫度三个方面的信息,比传统模糊集在处理模糊性和不确定性等方面更灵活。因此,基于直觉模糊集的多属性决策问题引起了众多学者的关注<sup>[3-8]</sup>。

目前,有关直觉模糊熵在不确定多属性决策中动态客观权重的研究尚少,但该类问题在实际中却有着极其重要的应用价值。本文首先提出了一种新的直觉模糊熵,建立了基于该直觉模糊熵求解决策方案的动态客观权重模型,即每个方案都会有各自的客观权重,克服了决策只有一个客观权重引起的误差,使决策更符合实际情况;其次针对属性值为直觉模糊集的多属性决策问题,提出了一种基于直觉模糊解析面积的 TOPSIS 模型求解多属性决策问题。

## 2 直觉模糊集

**定义 2.1**<sup>[9]</sup> 设  $X$  为一个给定非空论域,集合  $X$  上的直觉模糊集(IFS) $A$  定义如下:

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$$

其中  $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$  和  $\nu_A: X \rightarrow [0, 1]$  分别表示隶属函数和非隶属函数,  $\mu_A(x)$  称为元素  $x$  对于  $A$  的隶属度,  $\nu_A(x)$  称为元素  $x$  对于  $A$  的非隶属度,并满足条件  $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ 。

$IFS(X)$  表示论域  $X$  上的全体直觉模糊集。

**定义 2.2**<sup>[10]</sup> 设非空论域  $X$  上的 IFS 为  $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$ , 则称  $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$  为元素  $x$  在  $A$  中的犹豫度;  $s_A(x) = \mu_A(x) - \nu_A(x)$  为元素  $x$  在  $A$  中的分数;  $h_A(x) = \mu_A(x) + \nu_A(x)$

\* 收稿日期:2014-05-27;修订日期:2014-07-17

作者简介:姚伟烈(1991-),男,辽宁普兰店人,大连海事大学信息科学技术学院研究生;林琳(通信作者)(1978-),女,辽宁沈阳人,沈阳航空航天大学理学院副教授,博士,研究方向:模糊决策。

$(x)$ 为元素  $x$  在  $A$  中的准确度;  $\theta_A(x) = 1 - |\mu_A(x) - \nu_A(x)|$  为元素  $x$  在  $A$  中的模糊度。

在文献[11]中,定义了关于直觉模糊集的若干运算法则。

定义 2.3 设非空论域  $X$  上的两个直觉模糊集分别为  $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle | x \in X\}$  和  $B = \{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle | x \in X\}$ , 则:

$$A \cap B = \{\langle x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\nu_A(x), \nu_B(x)) \rangle | x \in X\}$$

$$A \cup B = \{\langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\nu_A(x), \nu_B(x)) \rangle | x \in X\}$$

$$A^c = \{\langle x, \nu_A(x), \mu_A(x) \rangle | x \in X\}$$

### 3 直觉模糊熵

定义 3.1<sup>[10]</sup> 设  $A \in IFS(X)$ , 定义函数  $E: IFS(X) \rightarrow [0, 1]$ , 称  $E(A)$  为直觉模糊集  $A$  的直觉模糊熵, 如果它满足下列条件:

- (1)  $E(A) = 0$  当且仅当  $\forall x \in X, \mu_A(x) = 1, \nu_A(x) = 0$  或  $\mu_A(x) = 0, \nu_A(x) = 1$ ;
- (2)  $E(A) = 1$  当且仅当  $\forall x \in X, \mu_A(x) = 0, \nu_A(x) = 0$ ;
- (3)  $\forall A, B \in IFS(X), x \in X$ , 有  $\pi_A(x) = \pi_B(x)$ , 如果  $\theta_A(x) \geq \theta_B(x)$ , 则  $E(A) \geq E(B)$ ;
- (4)  $\forall A, B \in IFS(X), x \in X$ , 有  $\theta_A(x) = \theta_B(x)$ , 如果  $\pi_A(x) \geq \pi_B(x)$ , 则  $E(A) \geq E(B)$ ;
- (5)  $E(A) = E(A^c)$ 。

定理 3.1 设  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  为非空论域,  $A \in IFS(X)$ , 则

$$E(A) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\tau_A(x_i) + \pi_A(x_i))$$

是直觉模糊集  $A$  的直觉模糊熵, 其中  $\tau_A(x_i) = \frac{1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|}{1 + \mu_A(x_i) + \nu_A(x_i)}$ 。

证明  $\forall x_i \in X$ , 由  $0 \leq \tau_A(x_i) \leq 1, 0 \leq \pi_A(x_i) \leq 1$ , 可知  $0 \leq \tau_A(x_i) + \pi_A(x_i) \leq 2$ 。

(1) 若  $E(A) = 0$ , 当且仅当  $\forall x_i \in X, \tau_A(x_i) + \pi_A(x_i) = 0$ 。由于  $0 \leq \tau_A(x_i) \leq 1, 0 \leq \pi_A(x_i) \leq 1$ , 则有  $\pi_A(x_i) = 0$  且  $1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)| = 0$ , 所以  $\mu_A(x) = 1, \nu_A(x) = 0$  或  $\mu_A(x) = 0, \nu_A(x) = 1$ 。

(2) 若  $E(A) = 1$ , 当且仅当  $\forall x_i \in X, \tau_A(x_i) + \pi_A(x_i) = 2$ , 由于  $0 \leq \tau_A(x_i) \leq 1, 0 \leq \pi_A(x_i) \leq 1$ , 则有  $\pi_A(x_i) = 1, \tau_A(x_i) = 1$  且  $\mu_A(x_i) + \nu_A(x_i) = 0$ , 所以  $\mu_A(x) = 0, \nu_A(x) = 0$ 。

(3)  $\forall x_i \in X, \pi_A(x_i) = \pi_B(x_i)$ , 若  $\theta_A(x_i) \geq \theta_B(x_i)$ , 则  $\mu_A(x_i) + \nu_A(x_i) = \mu_B(x_i) + \nu_B(x_i)$ , 即  $\tau_A(x_i) \geq \tau_B(x_i)$ , 所以  $E(A) \geq E(B)$ 。

(4)  $\forall x_i \in X, \theta_A(x_i) = \theta_B(x_i)$ , 若  $\pi_A(x_i) \geq \pi_B(x_i)$ , 则  $\mu_A(x_i) + \nu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i) + \nu_B(x_i)$ , 即  $\tau_A(x_i) \geq \tau_B(x_i)$ , 所以  $E(A) \geq E(B)$ 。

(5)  $\forall x_i \in X$ , 则  $A^c = (\mu_{A^c}(x_i), \nu_{A^c}(x_i)) = (\nu_A(x_i), \mu_A(x_i))$ , 显然  $\theta_A(x_i) = \theta_{A^c}(x_i), \pi_A(x_i) = \pi_{A^c}(x_i), \mu_A(x_i) + \nu_A(x_i) \leq \mu_{A^c}(x_i) + \nu_{A^c}(x_i)$ , 所以  $E(A) = E(B)$ 。

### 4 决策方案的动态属性权重

设  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$  为方案集,  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$  为属性集, 决策者对各属性的偏好权重为  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ ,  $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ 。方案  $Y_i (i=1, 2, \dots, n)$  在属性  $G_j (j=1, 2, \dots, m)$  下的特征信息用直觉模糊集表示:  $A_{ij} = \{\langle x, \mu_{ij}(x), \nu_{ij}(x) \rangle | x \in Y\}$ , 其中  $\mu_{ij}(x)$  表示方案  $Y_i$  满足属性  $G_j$  的隶属度;  $\nu_{ij}(x)$  表示方案  $Y_i$  不满足属性  $G_j$  的隶属度。方案  $Y_i$  在属性  $G_j$  下决策信息的直觉模糊熵为  $E_{G_j}, E_{G_j}$  反映了方案  $Y_i$  在属性  $G_j$  下决策信息的模糊度和不确定度。  $E_{G_j}$  值越大, 模糊程度和不确定程度越高, 说明决策时方案  $Y_i$  依赖属性  $G_j$  的程度越小, 因而决策时该属性的权重越小。

设方案  $Y_i$  在属性  $G_j$  下决策信息的偏差度为:  $d_{G_{ij}} = 1 - E_{G_{ij}}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ . 则方案  $Y_i$  在属性  $G_j$  下的动态客观权重为:

$$\gamma_{ij} = \frac{d_{G_{ij}}}{\sum_{k=1}^m d_{G_{ik}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

为兼顾决策者的偏好, 依据已知主观权重  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , 修正属性权重如下:

$$\omega_{ij} = \frac{\lambda_j \gamma_{ij}}{\sum_{k=1}^m \lambda_k \gamma_{ik}}, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

### 5 直觉模糊集的解析面积

定义 5.1 设  $A, B \in IFS(X)$ , 定义函数  $S: IFS(X) \times IFS(X) \rightarrow [0, 1]$ , 称  $S(A, B)$  为直觉模糊集  $A$  与  $B$  的解析面积, 如果它满足下列条件:

- (1)  $0 \leq S(A, B) \leq 1$ ;
- (2) 当且仅当  $A = B$  时,  $S(A, B) = 0$ ;
- (3)  $S(A, B) = S(B, A)$ .

定理 5.1 设  $A, B \in IFS(X), A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle | x \in X\}$  和  $B = \{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle | x \in X\}$ , 则

$$S(A, B) = \sqrt{D_\mu^2 + D_\nu^2 + D_\pi^2} \quad (3)$$

为直觉模糊集  $A$  与  $B$  的解析面积, 其中  $D_\mu = |\nu_A(x)\pi_B(x) - \nu_B(x)\pi_A(x)|$ ,  $D_\nu = |\mu_A(x)\pi_B(x) - \mu_B(x)\pi_A(x)|$ ,  $D_\pi = |\mu_A(x)\nu_B(x) - \mu_B(x)\nu_A(x)|$ .

证明 将直觉模糊集  $A$  和  $B$  映射到空间三角平面  $XYZ$  中为点  $(\mu_A(x), \nu_A(x), \pi_A(x))$  和点  $(\mu_B(x), \nu_B(x), \pi_B(x))$ , 如图 1 所示。

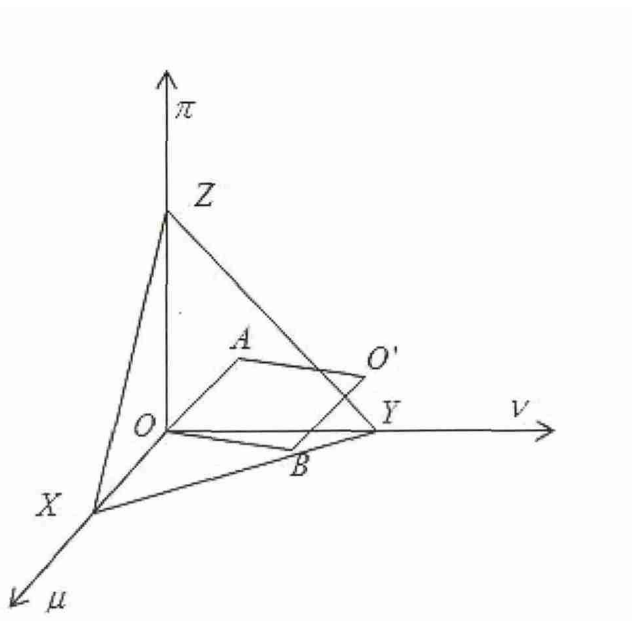


图 1 直觉模糊集解析面积的几何解释

由直觉模糊集  $A$  和  $B$  的解析夹角  $\triangle AOB$  以及邻边  $OA$  和  $OB$  构成的平行四边形  $OAO'B$  的面积为直觉模糊集  $A$  和  $B$  的解析面积。直觉模糊集的解析面积是从解析几何的角度去刻画两个直觉模糊集

的距离。

从直觉模糊集解析面积的几何解释很容易证明  $S(A, B)$  满足定义 5.1 的三个条件, 因为平行四边形  $OAO'B$  的面积介于 0 与 1 之间, 当且仅当直觉模糊集  $A$  和  $B$  相等时, 平行四边形的面积为零, 且满足交换律。

## 6 决策过程

步骤 1: 根据式(1)和式(2)计算属性动态客观权重, 并兼顾决策者的偏好, 修正属性权重;

步骤 2: 由文献[12]确定决策正理想方案和负理想方案, 则,

正理想方案为  $\alpha^+ = (\alpha_1^+, \alpha_2^+, \dots, \alpha_m^+)$ , 其中

$$\alpha_j^+ = \bigcap_{i=1}^n x_{ij} = \begin{cases} \mu_{ij}^+ = \max \mu_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n \\ \nu_{ij}^+ = \min \nu_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

负理想方案为  $\alpha^- = (\alpha_1^-, \alpha_2^-, \dots, \alpha_m^-)$ , 其中

$$\alpha_j^- = \bigcap_{i=1}^n x_{ij} = \begin{cases} \mu_{ij}^- = \min \mu_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n \\ \nu_{ij}^- = \max \nu_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

为计算简单起见, 提出超正理想方案和超负理想方案分别为:

$$\alpha_j^+ = \bigcap_{i=1}^n x_{ij} = \begin{cases} \mu_{.j}^+ = 1 \\ \nu_{.j}^+ = 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$\alpha_j^- = \bigcap_{i=1}^n x_{ij} = \begin{cases} \mu_{.j}^- = 0 \\ \nu_{.j}^- = 1 \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

步骤 3: 根据式(3)求各个方案与超正理想方案和超负理想方案的解析面积  $S_{ij}^{c+}$  和  $S_{ij}^{c-}$ ;

步骤 4: 求解各个方案的综合指标

$$H_i = \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \frac{S_{ij}^{c+}}{S_{ij}^{c+} + S_{ij}^{c-}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

步骤 5: 根据方案综合指标排序, 确定最佳方案。按照综合指标的大小可对各个方案进行排序,  $H_i$  值越小, 对应的方案较优。

## 7 实例分析

为了便于对比, 本文采用文献[13]中的实例进行分析。

某国国防部拟发展一种战术导弹武器装备, 研制部门提供了 4 种导弹型号的有关信息。为了选出合适的导弹型号, 国防部派出的专家组对 4 种导弹的战术技术指标进行了详细考察, 并给出了各指标的权重如表 1 所示。

表 1 导弹的规范化决策矩阵

型号	命中精度	弹头载荷	机动性能	价格	可靠性	可维修性
1	(0.47, 0)	(0.49, 0)	(0.54, 0.36)	(0.02, 0.98)	(0.5, 0.5)	(0.9, 0.05)
2	(0.58, 0)	(0.53, 0)	(0.29, 0.54)	(0.02, 0.97)	(0.2, 0.7)	(0.5, 0.5)
3	(0.42, 0)	(0.47, 0)	(0.49, 0.31)	(0.01, 0.98)	(0.8, 0.1)	(0.8, 0.1)
4	(0.51, 0)	(0.51, 0)	(0.34, 0.49)	(0.02, 0.98)	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)
$\lambda$	0.2	0.2	0.1	0.1	0.2	0.2

决策过程:

步骤 1: 根据式(1)和式(2), 求解动态客观属性权重再根据主观偏好修正权重为表 2;

表 2 动态属性权重

型号	命中精度	弹头载荷	机动性能	价格	可靠性	可维修性
1	0.1509	0.1561	0.0998	0.1346	0.2040	0.2547
2	0.1784	0.1660	0.0964	0.1334	0.2222	0.2036
3	0.1396	0.1531	0.0903	0.1363	0.2404	0.2404
4	0.1683	0.1683	0.0969	0.1406	0.2130	0.2130

步骤 2: 通过公式(3)计算各个方案与超正理想方案和超负理想方案的解析面积  $S_{ij}^+$  和  $S_{ij}^-$ , 最终求得各方案的综合指标为表 3;

表 3 导弹的综合属性值

型号	综合指标 $H_i$
1	0.4228
2	0.5936
3	0.3722
4	0.5444

根据方案的综合指标排序  $H_3 < H_1 < H_4 < H_2$ , 决策方案的最终排序为  $H_3 > H_1 > H_4 > H_2$ , 确定最佳方案为  $H_3$ .

文献[13]利用直觉模糊集汉明距离 TOPSIS 法的决策结果也是  $H_3 > H_1 > H_4 > H_2$ , 说明基于直觉模糊集的解析面积 TOPSIS 决策方法也是合理的, 并且, 本文利用直觉模糊熵计算了决策方案的动态权重, 使得每个决策方案都有属于自己的客观权重, 克服了传统决策方法没有客观权重或客观权重是决策方案客观权重平均值的弊端。本文计算的动态客观权重是符合实际情况的, 所以决策结果也更符合实际状况, 更合理。

## 8 结束语

本文针对决策的属性权重信息完全未知的情形, 各方案的属性值均为直觉模糊集的多属性决策问题。首先提出了直觉模糊熵、直觉模糊解析面积等相关概念; 其次建立了基于直觉模糊熵的动态客观权重模型, 以及基于直觉模糊集解析面积的 TOPSIS 模型求解多属性方案的综合指标; 最后通过一个实例分析, 表明该决策方法的正确性和有效性, 且易于实现。

参考文献:

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338~353.
- [2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20: 87~96.
- [3] Hong D H, Choi C H. Multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(1): 103~113.
- [4] Yager R R. Induced aggregation operators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 137(1): 59~69.
- [5] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(2): 277~291.
- [6] 王坚强, 张忠. 基于直觉梯形模糊数的信息不完全确定的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 226~231.

- [7] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215~219.
- [8] 雷英杰, 王宝树, 王毅. 基于直觉模糊决策的战场态势评估方法[J]. 电子学报, 2006, 34(12): 1275~1279.
- [9] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1179~1187.
- [10] Abbas S E. On intuitionistic fuzzy compactness[J]. Information Sciences, 2005, 173(1~3): 75~91.
- [11] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338~353.
- [12] Xu Z S, Yager R R. Dynamic fuzzy multi-attribute decision making[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 48(1): 246~262.
- [13] 夏勇其, 吴祈宗. 一种混合型多属性决策问题的 TOPSIS 方法[J]. 系统工程学报, 2004, 19(6): 630~634.

## A Dynamic Multi-attribute Decision-making Method Based on Intuitionistic Fuzzy Entropy—Analytic Area

YAO Wei-lie, LIN Lin

(Science Department, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

**Abstract:** Intuitionistic fuzzy entropy is an very important notation in intuitionistic fuzzy theory, which reflects the degree of uncertainty and fuzzy of intuitionistic fuzzy sets. One dynamic attribute weights model is established by an improved intuitionistic fuzzy entropy, which is proposed in this paper, and a TOPSIS method based on intuitionistic fuzzy analytic area is put forward, then the methods are applied to solve the intuitionistic fuzzy multi-attribute decision-making problems. Finally, numerical example illustrates the correctness and practicality of this method.

**Key words:** Multi-attribute Decision-making; Intuitionistic Fuzzy Entropy; Dynamic Weights; Intuitionistic Fuzzy Analytic Area